

Karta pracy - liczby niewymierne i pierwiastki

(z.d.) $\rightarrow$ zadanie domowe

Liczby niewymierne

1. Spośród podanych liczb określ, czy jest to liczba naturalna, całkowita, wymierna, niewymierna. Wstaw w pustych polach znak $\checkmark$ lub $\times$.

liczba	0	1	-3	0	$\sqrt{4}$	$-\frac{12}{3}$	$\sqrt[3]{125}$	$-\sqrt{3}$	$121\frac{1}{3}$	$2 - \sqrt{2}$
naturalna										
całkowita										
wymierna										
niewymierna										

2. Podaj liczbę naturalną n spełniającą warunek:

- a) $n < \sqrt{35} < n + 1$,
- b) $n < 2\sqrt{3} < n + 1$,
- c) $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$ (z.d.)

Pierwiastek kwadratowy

3. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{2}$. Wskazówka: Zapisz wyrażenie pod każdym pierwiastkiem jako wielokrotność liczby 2.

- a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32}$
- b) $\sqrt{242} - \sqrt{98} - \sqrt{72}$
- c) $\sqrt{800} - \sqrt{200} + \sqrt{50}$
- d) $\sqrt{288} - \sqrt{162} + \sqrt{128}$ (z.d.)

4. Oblicz.

- a) $\sqrt{0,25} + \sqrt{1,44} + \sqrt{6,25}$
- b) $\sqrt{3,61} - \sqrt{1,21} - \sqrt{0,09}$
- c) $\sqrt{3,24} + \sqrt{2,89} - \sqrt{2,56}$ (z.d.)

5. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

- a) $\sqrt{12}$
- b) $\sqrt{20}$
- c) $\sqrt{180}$
- d) $\sqrt{252}$ (z.d.)

Wskazówka:

Pierwsza strategia to rozpisać liczbę pod pierwiastkiem jako iloczyn, np.:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

Druga strategia to rozkład liczby na czynniki pierwsze:

$$\sqrt{45} = \sqrt{\underbrace{3 \cdot 3}_9 \cdot 5} = \underbrace{3}_3 \sqrt{5}$$

a) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$ b) $-2\sqrt{32} - 2\sqrt{8}$
c) $0,2\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72}$ d) $3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45}$

a) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$
 b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$
 c) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$
 d) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$
 e) $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}(z.d.)$
 f) $7\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}(z.d.)$

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (z.d.) c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$
d) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ (z.d.) e) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$ (z.d.)

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{3 \cdot \cancel{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

a) $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$ b) $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}} (z.d.)$
c) $\sqrt{2\frac{2}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt{6,4} : \sqrt{10} (z.d.)$

a) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$
b) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$ (z.d.)

Potęgowanie

Potęgowanie iloczynu i ilorazu liczb

Zadania

1. Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^4, (-2)^5, (-3)^3, (-3)^4, (-5)^2, (-5)^3$$

2. Oblicz.

a) $(-1)^5, 0^5, 1^5$

b) $(-2)^1, (-2)^2, (-2)^3$

c) $(\sqrt{3})^4, (\sqrt{3})^5, (\sqrt{3})^6$

d) $(\sqrt{2})^6, (\sqrt{2})^7, (\sqrt{2})^8$

3. Oblicz.

a) $8^{-4} \cdot 4^4$

b) $18^{-3} : 6^{-3}$

c) $(2\frac{3}{7})^5 : (\frac{17}{14})^5$

d) $(\frac{2}{21})^{-3} \cdot 15^{-3} \cdot 7^{-3}$

e) $\frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot (\frac{4}{9})^2$

4. Oblicz.

a) $2^6 \cdot 5^5$

b) $4^3 \cdot 5^3$

c) $4^3 \cdot 5^4$

d) $6^5 : 3^5$

e) $12^4 : 4^4$

f) $12^5 : 4^4$

g) $(\frac{1}{6})^3 \cdot 6^3$

h) $(\frac{1}{3})^4 \cdot 3^5$

i) $(\frac{2}{5})^2$

j) $(-\frac{3}{7})^3$

k) $\frac{4^6}{8^6}$

l) $\frac{(-3)^4}{9^4}$

Zadanie domowe: podręcznik zad. 5,6 str. 36

Mnożenie potęg o tej samej podstawie

Zadania

5. Oblicz. Wynik zapisz jako potęgę.

a) $2^0 + 3^0 + 4^0$

c) $(-2)^1 + (-3)^1 + (-4)^1$

e) $2^2 \cdot 2 \cdot 2^3$

g) $-3^2 + (-3)^2$

i) $3^4 + 6 \cdot 3^3$

k) $\frac{2^3 \cdot 5^3}{10^2}$

b) $(-2)^0 + (-3)^0 + (-4)^0$

d) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^2$

f) $(-5)^0 \cdot (-5)^1 \cdot (-5)^2$

h) $-2^5 + (-2)^5$

j) $(-2)^4 + (-2)^3$

l) $\frac{10^3 \cdot 2^2}{5^3}$

Dzielenie potęg o tej samej podstawie

Zadania

6. Oblicz.

a) $5^{-9} : 5^{-11}$

b) $4 : 4^{-4}$

c) $6^5 : 3^5$

d) $10^{10} : 5^{10}$

e) $6^3 \cdot 2^{-5}$

f) $10^4 \cdot 5^{-2}$

7. Oblicz.

a) $2^{-1} + 4^{-1}$

b) $3^{-1} - 9^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

e) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(2\frac{1}{2}\right)^{-1}$

f) $\left(-8\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(-3\frac{1}{8}\right)^{-1}$

g) $0,1^{-1} - 0,2^{-1}$

h) $(-0,25)^{-1} + 0,125^{-1}$

i) $(\sqrt{3})^{-1}$

j) $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{-1}$

8. Oblicz.

a) $2^{-2} + 2^{-3}$

b) $3^{-2} + 3^{-3}$

c) $(2\sqrt{5})^{-3}$

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{-4}$

Zadanie domowe: podręcznik zad. 1-9 str. 39

Potęgowanie potęg

Zadania

9. Oblicz.

- | | |
|--|--|
| a) $(2^2)^3$ | b) $((-4)^3)^1$ |
| c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2)^3$ | d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3)^2$ |
| e) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$ | f) $\left((-3\sqrt{2})^{-1}\right)^{-2}$ |
| g) $\left((-2)^{-3}\right)^{-2} : \left((-2)^{-1}\right)^{-6}$ | h) $\left(2^3\right)^2)^3$ |

10. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 5.

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| a) $\sqrt{5}$ | b) $\sqrt[3]{5}$ |
| c) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ | d) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ |
| e) $\sqrt[3]{25}$ | f) $\sqrt{\frac{1}{5^3}}$ |
| g) $\frac{1}{\sqrt[5]{5^3}}$ | h) $\sqrt{125}$ |
| i) $5\sqrt{5}$ | j) $5\sqrt[3]{5}$ |

11. Oblicz.

- | | |
|--|---|
| a) $3^2 \cdot 27^{\frac{2}{3}}$ | b) $3^3 : 243^{\frac{1}{4}}$ |
| c) | d) $8^{\frac{2}{3}} : 4^{-\frac{3}{2}}$ |
| e) $0,027^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{64}$ | f) $0,09^{\frac{1}{2}} : 125^{\frac{1}{3}}$ |
| g) $0,0081^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$ | h) $0,027^{\frac{2}{3}} : \sqrt[6]{27^2}$ |

Zadanie domowe: podręcznik zad. 6-9 str. 44

Dla liczb wymiernych x, y oraz dodatnich liczb rzeczywistych a i b :

$$\begin{aligned} a^x \cdot b^x &= (ab)^x & \frac{a^x}{b^x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \\ a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ (a^x)^y &= a^{x \cdot y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 & a^1 &= a \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} & a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \end{aligned}$$

n	2^n	3^n	4^n	5^n
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125
4	16	81	256	625
5	32	243	1024	3125
6	64	729		
7	128			
8	256			
9	512			
10	1024			

Tabela 1: Tabelka potęg

2	3	4	5
$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$
$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{125}$
$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[4]{256}$	$\sqrt[4]{625}$
$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[5]{243}$	$\sqrt[5]{1024}$	$\sqrt[5]{3125}$
$\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[6]{729}$		
$\sqrt[7]{128}$			
$\sqrt[8]{256}$			
$\sqrt[9]{512}$			
$\sqrt[10]{1024}$			

Tabela 2: Tabelka pierwiastków

Uwaga. Dla ujemnych podstaw potęgi **parzyste** potęgi usuwają minusy, **nieparzyste** zostawiają minusy.

Kolejność wykonywania działań.

1. Potęgowanie i pierwiastkowanie
2. Mnożenie i dzielenie
3. Dodawanie i odejmowanie

Jak zapisać wynik? Przy zadaniach z potęgowaniem wynik najczęściej zapisuje się albo w postaci potęgi, albo jako liczbę.

Jak rozwiązywać zadania? Przy zadaniach z potęgowaniem należy możliwie długo powstrzymywać się z obliczaniem danej potęgi do momentu uzyskania najprostszej postaci.

Logarytmy

Logarytm a potęgowanie i pierwiastkowanie

Zadania

1. Wskaż potęgę x dla której zachodzi podana równość.

- | | | | |
|---|--|---|---|
| a) $3^x = 243$ | b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$ | c) $3^x = \frac{1}{9}$ | d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$ |
| e) $5^x = 125$ | f) $10^x = 100$ | g) $5^x = 625$ | h) $10^x = 1000$ |
| i) $2^x = \frac{1}{1024}$ | j) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 216$ | k) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$ | l) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$ |
| m) $\left(\frac{324}{64}\right)^x = \frac{18}{8}$ | n) $\left(\frac{8}{27}\right)^x = \frac{3}{2}$ | o) $\left(\frac{216}{125}\right)^x = \frac{6}{5}$ | p) $\left(\frac{256}{225}\right)^x = \frac{15}{16}$ |
| q) $2^x = \sqrt{2}$ | r) $3^x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | s) $\sqrt{2^x} = 4\sqrt{2}$ | t) $\sqrt{3^x} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ |
| u) $4^x = 4$ | v) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1$ | | |

2. Oblicz.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\log_2 512$ | b) $\log_3 243$ | c) $\log_5 125$ |
| d) $\log_3 3$ | e) $\log_3 1$ | f) $\log_3 \frac{1}{3}$ |
| g) $\log_2 \frac{1}{2}$ | h) $\log_2 \frac{1}{32}$ | i) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ |
| j) $\log_2 \sqrt[5]{2}$ | k) $\log_3 3\sqrt{3}$ | l) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt{2}$ |
| m) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}$ | n) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}}$ | o) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$ |

3. Oblicz x , jeśli:

- | | | |
|--------------------------------|--|------------------------------|
| a) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ | b) $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}$ | c) $\log_2 x = -\frac{2}{3}$ |
| d) $\log_4 x = 0$ | e) $\log_2 x = 10$ | f) $\log_{2\sqrt{2}} x = -3$ |

4. Oblicz x , jeśli:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$ | b) $\log_x 2 = \frac{1}{3}$ | c) $\log_x \frac{1}{9} = -2$ |
| d) $\log_x 64 = -3$ | e) $\log_x 27 = 3$ | f) $\log_x 36 = -2$ |

Definicja logarytmu

Zadania

5. Dla podanego logarytmu wyznacz liczbę całkowitą k , taką że;

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $k < \log_3 5 < k + 1$ | b) $k < \log_5 100 < k + 1$ |
| c) $k < \log_3 \frac{1}{6} < k + 1$ | d) $k < \log_2 \frac{1}{12} < k + 1$ |
| e) $k < \log_{\sqrt{3}} 2 < k + 1$ | f) $k < \log_{\sqrt{2}} 2,5 < k + 1$ |

6. Oblicz.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\log_2 2^3$ | b) $\log_\pi \pi^3$ |
| c) $\log_2 32^4$ | d) $\log_3 81^{-4}$ |
| e) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$ | f) $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$ |
| g) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$ | h) $\log_{\sqrt{5}} (5\sqrt[3]{5})$ |
| i) $\log_2 8\sqrt{2}$ | j) $\log_3 9\sqrt{3}$ |
| k) $\log_{\frac{1}{3}} (81\sqrt{3})$ | l) $\log_{\frac{1}{5}} (25\sqrt{5})$ |
| m) $\log_4 (8\sqrt[4]{2})$ | n) $\log_{2\sqrt{2}} (4\sqrt{8})$ |

7. Oblicz. Wynik podaj w postaci logarytmu $c \log_a b$.

- | | |
|---|---|
| a) $2 \log_5 3 + \log_5 2$ | b) $5 \log_9 2 + 2 \log_9 \frac{1}{4}$ |
| c) $\log_3 \sqrt{27} + \log_3 \sqrt{3}$ | d) $\log_2 \sqrt{32} + \log_2 \sqrt{8}$ |
| e) $\log_5 44 - 2 \log_2 2$ | f) $2 \log_3 6 - 2 \log_3 2$ |
| g) $\log_5 1250 - \log_5 10$ | h) $\log_5 3\frac{3}{4} - \log_5 \frac{3}{4}$ |
| i) $3 \log_5 3 + 2 \log_5 2 - \log_5 6$ | j) $-7 \log_3 \frac{1}{2} - 3 \log_3 4$ |

8. Oblicz.

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $2^{\log_2 7}$ | b) $3^{\frac{1}{2} \log_3 16}$ |
| c) $4^{2+\log_4 3}$ | d) $5^{-1+2 \log_5 4}$ |
| e) $36^{\log_6 5 - \frac{1}{4}}$ | f) $27^{\log_3 2 - \frac{1}{3}}$ |
| g) $3^{2+\log_3 4}$ | h) $2^{5 - \frac{1}{3} \log_2 27}$ |

Zadanie domowe: podręcznik zad. 5,6,8 str. 47

Procenty

Zadania

Obliczanie procentu danej liczby

1. Oblicz:

- | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| a) 1‰ liczby 200 | b) 5‰ liczby 1000 | c) 10‰ liczby 600 |
| d) 2,5% liczby 60 | e) 5% liczby 60 | f) 10% liczby 60 |
| g) 25% liczby 60 | h) 50% liczby 60 | i) 12,5% liczby 8 |
| j) 10% liczby 10 | k) 120% liczby 250 | l) 150% liczby 24 |

2. Oblicz, jakim procentem liczby a jest liczba b .

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $a = 80$ $b = 20$ | b) $a = 160$ $b = 12$ | c) $a = 800$ $b = 44$ |
| d) $a = 450$ $b = 36$ | e) $a = 60$ $b = 90$ | f) $a = 90$ $b = 342$ |

3. O ile procent liczba x jest większa od liczby y ? O ile procent y jest większa od liczby x ?

- | | | |
|------------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $x = 32$ $y = 20$ | b) $x = 60$ $y = 48$ | c) $x = 8$ $y = 6$ |
| d) $x = 2,4$ $y = 0,6$ | e) $x = 22$ $y = 4,4$ | f) $x = 80$ $y = 25$ |

Wahania procentowe

4. Po roku chodzenia na siłownię mężczyzna ważący wcześniej 72 kg waży teraz 80 kg.

- a) O ile zwiększyła się jego waga?
- b) O ile procent zwiększyła się jego waga?

5. Produkt po obniżce ceny o 25% kosztował 900 złotych.

- a) Ile kosztował przed obniżką?
- b) O ile procent należy podnieść obecną cenę, aby otrzymać cenę sprzed obniżki?

6. Pewien bodybuilder odnotował w kolejnych latach przyrosty w wyciskaniu sztangi na poziomie kolejno 10% i 5%. Obecnie wyciska on 140 kg.

- a) Ile wyciskał rok temu?
- b) Ile wyciskał dwa lata temu?

7. Akcje pewnej spółki kosztowały 72 \$. W kolejnych dniach spółka odnotowała spadki odpowiednio o 5% oraz o 10%.

- a) Ile obecnie kosztują akcje spółki?
- b) Ile kosztowałyby akcje spółki przy jednorazowym spadku o 15%?

8. Pod dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru, za każdym razem o p %, jego cena spadła o 75%. Oblicz p .

Zadania z kontekstem realistycznym

9. Pan Janusz zainwestował kwotę 2000 zł w banku Stonks na lokacie o stałej rocznej stopie procentowej równej 5% i okresie kapitalizacji równym roku. Ile pieniędzy będzie miał po trzech latach?

10. W banku obniżono oprocentowanie kredytu z 20% na 18,5%.

- a) O ile punktów procentowych zmniejszono oprocentowanie?
- b) O ile procent staniał kredyt w tym banku?

11. Poparcie dla partii „A” w marcu było równe 24%. W kwietniu poparcie dla tej partii wzrosło o 3 punkty procentowe.

- a) Ile procent było równe poparcie dla partii „A” w kwietniu?
- b) O ile procent wzrosło poparcie dla partii „A” w kwietniu?

12. Rozważamy pół litra roztworu 40% pewnej substancji. Ile wody należy dolać, aby uzyskać roztwór 20%?

13. W tabeli podano ceny gorących napojów w pewnym sklepie przed podwyżką i wysokość podwyżki. Oblicz, ile trzeba było zapłacić za 0,2 l kawy oraz 0,4 l czekolady:

- a) przed podwyżką
- b) po podwyżce
- c) O ile procent wzrosła cena całego zakupu?

Napój	Cena	Podwyżka
Kawa	30 zł/l	12,5%
Czekolada	40 zł/l	20%

Dodatki

14. Jak widać na obrazku McZestaw kosztował w promocji 10 zł w 2013 roku. Obecnie w 2025 roku ten sam McZestaw kosztuje 31 zł.



- a) O ile zwiększyła się cena zestawu?
- b) O ile procent zwiększyła się cena zestawu?

15. Oblicz:

- a) 2‰ liczby 2
- b) 5‰ liczby 240
- c) 15‰ liczby 300
- d) 16‰ liczby 550
- e) 0,2% liczby 250
- f) 0,5% liczby 250
- g) 4% liczby 75
- h) 75% liczby 4

16. Miesiąc przed Black Friday sklep postanowił najpierw podwyższyć cenę produktu o 20% procent. Następnie, miesiąc później obniżył cenę o ten sam procent w wyniku czego produkt kosztuje teraz 1500 zł.

- a) Ile kosztował produkt na początku?
- b) O jaki procent zmieniła się cena produktu?

17. W tabeli podano ceny mikropłatności w pewnej grze oraz wysokość świątecznych przecen. Gracz chce kupić możliwie **najtaniej** 2600 jednostek wewnętrznej waluty gry. Ile zapłaci przed, a ile po przecenie?

Waluta	Cena	Obniżka
100	12 zł	12,5%
500	45 zł	20%
1000	60 zł	25%

18. Cena biletu na pierwszy mecz Śląska Wrocław wynosiła 12 zł. Gdy przed drugim meczem Śląska na własnym stadionie obniżono cenę biletu, na trybunach zasiadło o 80% kibiców więcej niż podczas pierwszego spotkania, a wpływy ze sprzedaży biletów zwiększyły się o 20%. Oblicz nową cenę biletu.