

Wyłączanie wspólnego czynnika

Zadania

1. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{3}{2}x + 2 = 0$

b) $(x - 5)(x + 3) = 0$

c) $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{8}) = 0$

d) $x(x + 4) = 0$

e) $x^2(x - 3) = 0$

f) $5(x + 2) = 0$

g) $(x - 2)^2 = 0$

h) $x^2 - 4 = 0$

i) $x^3 - 27 = 0$

j) $3(x - 2)(x^2 - 25) = 0$

$$\diamond \cdot \square + \diamond \cdot \triangle = \diamond \cdot (\square + \triangle)$$

Zadania

2. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $3x - 6$

b) $12y + 20x$

c) $-10x^2 + 5x$

d) $x^2y - xy^2$

e) $9a^3 - 6a^2b$

f) $100a^3b^2 + 10a^2b$

g) $12x^2y^4 - 8x^4y^3$

h) $-21ba^4 + 35ab^5$

i) $-72x^5a^5 - 24a^2x^3$

3. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $(a + b)x + (a + b)y$

b) $(5 - x)a + (5 - x)b$

c) $(2a + b)y - 6(2a + b)$

d) $(4z + 3)x - (4z + 3)$

e) $x^2(10a - 1) - x(10a - 1)$

f) $(7b - 5a)(x + y) + (x - y)(7b - 5a)$

g) $3(x - 4)x - (x - 4)$

h) $(2y + 3) + 2(2y + 3)y^2$

4. Rozwiąż równania:

a) $(x - 3)x + 7(x - 3) = 0$

b) $2(x + 1) - x(x + 1) = 0$

c) $(x - 2) - x(x - 2) = 0$

d) $x(x + 5) = 3(x + 5)$

e) $-(x - 1)x = 9(x - 1)$

f) $(x + 2)(x + 3) - 5(x + 3) = 0$

g) $(x - 1)(x - 6) = -2x(x - 1)$

h) $(2x + 1)(x - 4) = 9(x - 4)$

Zadanie domowe: podręcznik zad. 11,12,13 str. 87

Wzory skróconego mnożenia

$$(\triangle + \square)^2 = \triangle^2 + 2 \cdot \triangle \cdot \square + \square^2$$

5. Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, oblicz:

- | | | |
|------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $(x + 9)^2$ | b) $(8 + y)^2$ | c) $(2a + 3)^2$ |
| d) $(4x + 5y)^2$ | e) $(\sqrt{2} + b)^2$ | f) $(3a + \sqrt{3})^2$ |

$$(\triangle - \square)^2 = \triangle^2 - 2 \cdot \triangle \cdot \square + \square^2$$

6. Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, oblicz:

- | | | |
|-----------------|-------------------------|--------------------------------|
| a) $(5 - b)^2$ | b) $(a - 4)^2$ | c) $(3a - 2b)^2$ |
| d) $(7x - 1)^2$ | e) $(2\sqrt{2} - 5x)^2$ | f) $(\sqrt{2}x - \sqrt{8}y)^2$ |

$$(\triangle - \square) \cdot (\triangle + \square) = \triangle^2 - \square^2$$

7. Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, oblicz:

- | | |
|-----------------------------|---|
| a) $(x - 10)(x + 10)$ | b) $(y + 11)(y - 11)$ |
| c) $(4x + 2y)(4x - 2y)$ | d) $(1 - \sqrt{5}x)(1 + \sqrt{5}x)$ |
| e) $(13x + 14y)(13x - 14y)$ | f) $(\sqrt{3}a - \sqrt{6}b)(\sqrt{3}a + \sqrt{6}b)$ |

8. Oblicz:

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(6 + \sqrt{3})^2$ | b) $(3 - \sqrt{5})^2$ | c) $(4 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 4)$ |
| d) $(2\sqrt{5} + 1)^2$ | e) $(\sqrt{7} - 5)^2$ | f) $(3 + \sqrt{7})(\sqrt{7} - 3)$ |
| g) $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{7})^2$ | h) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ | i) $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$ |
| j) $(6\sqrt{2} + 2\sqrt{6})^2$ | k) $(2\sqrt{10} - 5\sqrt{2})^2$ | l) $(1 - 4\sqrt{5})(1 + 4\sqrt{5})$ |

Zadanie domowe: podręcznik zad. 9,10,11 str. 96

9. Oblicz:

a) $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$

b) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$

c) $(4 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 4)$

d) $(3 + \sqrt{7})(\sqrt{7} - 3)$

e) $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$

f) $(3\sqrt{5} - 7)(3\sqrt{5} + 7)$

g) $(1 - 4\sqrt{5})(1 + 4\sqrt{5})$

h) $(10\sqrt{6} + 3)(10\sqrt{6} - 3)$

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia

Rozwiązywanie równań z jedną niewiadomą

Cel: chcemy zastosować wzór skróconego mnożenia, żeby sprowadzić wyrażenie do postaci iloczynowej i przyrównać wyrażenie pod nawiasem do zera.

Rozwiąż równanie:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Rozwiązanie:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = (x + 1)^2 = 0 \rightarrow x = -1 \quad x \in \{-1\}$$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

Rozwiązanie:

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad x \in \{2\}$$

c) $x^2 - 9 = 0$

Rozwiązanie:

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3) = 0 \rightarrow x = 3 \text{ lub } x = -3 \quad x \in \{3, -3\}$$

Usuwanie niewymierności

Cel: wzoru na różnicę kwadratów $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ można użyć do usunięcia niewymierności z mianownika.

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{6+\sqrt{2}}$

Rozwiązanie:

$$\frac{1}{6+\sqrt{2}} \cdot \frac{6-\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (6-\sqrt{2})}{(6+\sqrt{2}) \cdot (6-\sqrt{2})} = \frac{6-\sqrt{2}}{6^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6-\sqrt{2}}{36-2} = \frac{6-\sqrt{2}}{34}$$

b) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Rozwiązanie:

$$\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(3-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{3\sqrt{3}+3-1-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3}}{3-1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Zadania

10. Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2 + 8x + 16$

b) $x^2 - 6x + 9$

c) $x^2 + 10x + 25$

d) $4x^2 - 4x + 1$

e) $25x^2 + 10x + 1$

f) $16x^2 + 8x + 1$

g) $4x^2 + 12x + 9$

h) $9x^2 + 12x + 4$

i) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

11. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

b) $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$

f) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

12. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$

b) $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}$

c) $\frac{\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}+2}$

d) $\frac{3\sqrt{6}-6}{3-6\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{2}+3}{3-\sqrt{2}}$

f) $\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$

g) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

h) $\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3\sqrt{15}}$

Zadanie domowe: podręcznik zad. 5,6,7 str. 100

Wartość bezwzględna

Definicja

Wartość bezwzględna to operacja, która usuwa ujemność z liczby:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Pytanie: Czy wyrażenie jest dodatnie albo zerowe?

- **Tak:** wartość bezwzględna nic nie robi
- **Nie:** bierzemy je w nawias i stawiamy przed nim minus

Przykłady

$$|1| = 1$$

$$|-1| = -(-1) = 1$$

$$|2| = 2$$

$$|-2| = -(-2) = 2$$

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

$$|-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$|0| = 0$$

$$|-0| = -(-0) = 0$$

$$|3, 14| = 3, 14$$

$$|-3, 14| = -(-3, 14) = 3, 14$$

$$\left| \frac{22}{7} \right| = \frac{22}{7}$$

$$\left| -\frac{22}{7} \right| = -\left(-\frac{22}{7} \right) = \frac{22}{7}$$

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

$$|3, 14 - \pi| = -(3, 14 - \pi) = -3, 14 + \pi = \pi - 3, 14$$

$$|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

$$|\sqrt{5} - \sqrt{6}| = -(\sqrt{5} - \sqrt{6}) = -\sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$|2 - 2\sqrt{3} - \pi| = -(2 - 2\sqrt{3} - \pi) = -2 + 2\sqrt{3} + \pi$$

Uwaga. Aby powiedzieć, czy wyrażenie jest ujemne, bardzo przydatne są rozwiązania dziesiętne:

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad \sqrt{3} \approx 1,73 \quad \sqrt{5} \approx 2,24 \quad \sqrt{6} \approx 2,45 \quad \sqrt{7} \approx 2,65 \quad \pi \approx 3,14$$

Interpretacja geometryczna

Wartość bezwzględna mówi nam o odległości danej liczby od zera.

Pytanie: Jakie liczby znajdują się w odległości 5 od 0?

Rozwiązanie: Rozwiązujemy równanie:

$$\begin{array}{ccc} & |x| = 5 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x = 5 & \text{lub} & x = -5 \\ & x \in \{5, -5\} & \end{array}$$

Polecenie: Zaznacz liczby spełniające równanie $|x| = 5$ na osi liczbowej.

Pytanie: Jakie liczby znajdują się w odległości 5 względem punktu 2?

Rozwiązanie: Rozwiązujemy równanie:

$$\begin{array}{ccc} & |x - 2| = 5 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x - 2 = 5 & \text{lub} & x - 2 = -5 \\ x = 7 & & x = -3 \\ & x \in \{7, -3\} & \end{array}$$

Polecenie: Zaznacz liczby spełniające równanie $|x - 2| = 5$ na osi liczbowej.

Pytanie: Jakie liczby znajdują się w odległości **mniejszej** od 3 względem 0?

Rozwiązanie: Rozwiązujemy nierówność:

$$\begin{array}{ccc} & |x| < 3 & \\ & \downarrow & \\ & -3 < x < 3 & \\ \swarrow & & \searrow \\ -3 < x & \text{i} & x < 3 \\ & x \in (-3; 3) & \end{array}$$

Polecenie: Zaznacz liczby spełniające nierówność $|x| < 3$ na osi liczbowej.

Pytanie: Jakie liczby znajdują się w odległości **większej** od 4 względem 0?

Rozwiązanie: **Rozwiązujemy** nierówność:

$$\begin{array}{ccc} & |x| > 4 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x < -4 & \text{lub} & 4 < x \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$$

Polecenie: Zaznacz liczby spełniające nierówność $|x| > 4$ na osi liczbowej.

Polecenie: Zaznacz liczby spełniające nierówność $4 < |x| < 6$ na osi liczbowej.

Zadania

13. Oblicz.

- | | |
|--|---|
| a) $ -5 $ | b) $ -2+12 $ |
| c) $ -2 + 2 $ | d) $- -3 + -3 $ |
| e) $ 3-7 - 2-8 $ | f) $ \sqrt{3}-2 $ |
| g) $ 2-\sqrt{5} + \sqrt{5}-1 $ | h) $4 \cdot 0,5\pi - 1,57 - 2\pi - 6,3 $ |
| i) $\left \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right $ | j) $ (4+3\sqrt{7})(4-3\sqrt{7}) $ |
| k) $\left \frac{5}{2\sqrt{5}-5}\right $ | |

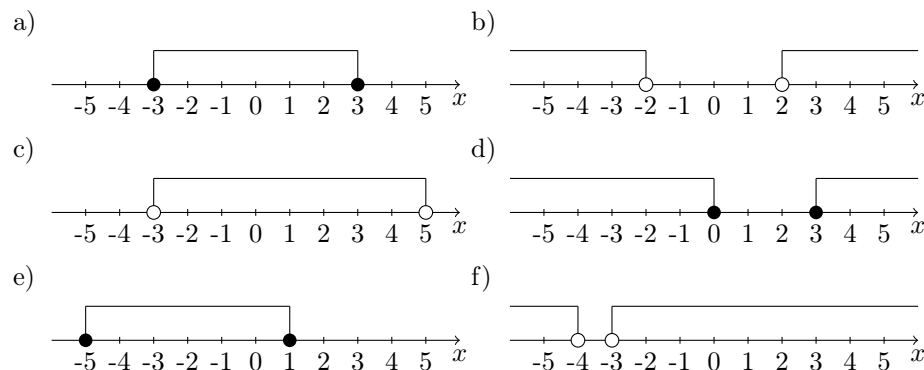
14. Oblicz wartość podanego wyrażenia dla $x = -2\frac{1}{2}$.

- a) $||x| - 3| - \frac{1}{2}$ b) $|1 - |x|| + \frac{1}{2}$ c) $||x| - 6| - |x|$

15. Rozwiąż równanie. Zaznacz na osi liczbowej liczby spełniające to równanie.

- | | |
|-------------------|-----------------------------|
| a) $ x = 4$ | b) $ x = 2\sqrt{3}$ |
| c) $3 x + 6 = 7$ | d) $\frac{1}{2} x - 1 = 3$ |
| e) $3 - 2 x = 1$ | f) $9 - \frac{3}{4} x = 6$ |
| g) $ 2x = 0$ | h) $ 5x = 3$ |

16. Podaj nierówność opisującą zaznaczony zbiór.



17. Zapisz w postaci $|x - a| \leq b$ nierówność z niewiadomą x , której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -6; 4 \rangle$.

18. Zapisz w postaci $|x - a| \geq b$ nierówność z niewiadomą x , której zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $(-\infty; -2) \cup \langle 8; \infty)$.

Zadanie domowe: podręcznik zad. 5, 6, 8, 9 str. 103