

Funkcje

Sposoby określania funkcji

Przykład

Rozważmy funkcję $f : X \rightarrow Y$, która danej wielkości zarobków x **przyporządkowuje** liczbę osób y , która w danym państwie otrzymuje te zarobki:

x Zarobki (zł)	$f(x) = y$ Liczba osób
1000	120
2000	480
3000	1300
4000	2600
5000	4100
6000	5200
7000	5000
8000	4300
9000	3400
10000	2500

Nazewnictwo:

- $f : X \rightarrow Y$ czytamy: „funkcja f ze zbioru X w zbiór Y ”
- x - **argument** funkcji; tutaj: jeden z możliwych zarobków
- X - **dziedzina** funkcji, czyli zbiór wszystkich argumentów x ; tutaj: zbiór wszystkich możliwych zarobków:

$$X = \{1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000\}$$

- y - **wartość** funkcji; tutaj: liczba osób mająca dane zarobki, np.:

$$f(x) = y \leftarrow \text{to jest wartość funkcji dla argumentu } x$$

$$f(1000) = 120 \leftarrow \text{to jest wartość funkcji dla argumentu } x = 1000$$

$$f(2000) = 480 \leftarrow \text{to jest wartość funkcji dla argumentu } x = 2000$$

$\vdots$

$$f(10000) = 2500 \leftarrow \text{to jest wartość funkcji dla argumentu } x = 10000$$

- Y - **przeciwdziedzina** funkcji, czyli zbiór docelowy funkcji; tutaj: zbiór możliwych liczb osób:

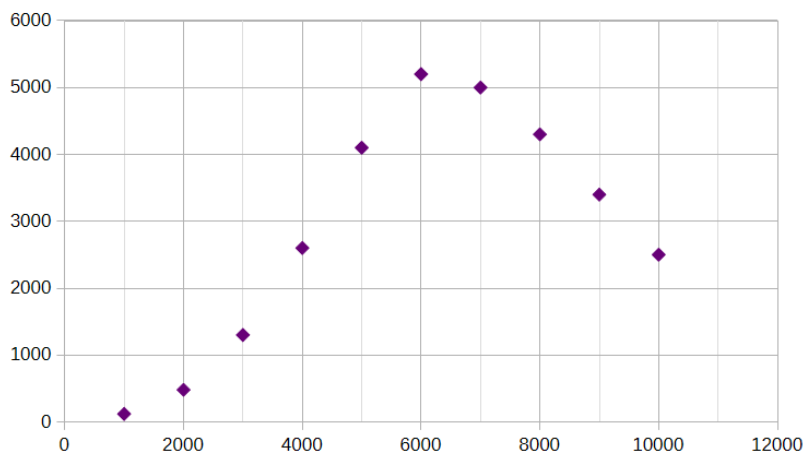
$$Y = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- ZW - **zbiór wartości**; tutaj:

$$ZW = \{120, 480, 1300, 2600, 4100, 5200, 5000, 4300, 3400, 2500\}$$

- **wykres funkcji** - zbiór punktów (x, y) (narysowanych w układzie współrzędnych); tutaj:

$$\{(1000, 120), (2000, 480), \dots, (10000, 2500)\}$$



Definicja 1. Funkcja f to **przyporządkowanie** każdemu elementowi ze zbioru X **dokładnie jednego** elementu zbioru Y .

Tutaj: każdy zarobek ma **dokładnie jedną** liczbę osób.

Przykład

Wykonujemy rzut kostką. Rozważmy funkcję $g : X \longrightarrow Y$, która numerowi rzutu przyporządkowuje wynik:

x	1	2	3	4	5
$f(x) = y$	2	5	4	1	2

- Podaj funkcję w postaci grafu.
- Podaj: dziedzinę X , przeciwdziedzinę Y , zbiór wartości ZW , wykres.

Przykład

Rozważmy funkcję zadaną wzorem:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

- Podaj w tabelce przykładowe wartości funkcji.
- Podaj: dziedzinę, przeciwdziedzinę, zbiór wartości, wykres.

Przykład

Rozważmy funkcję, która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje odwrotność liczby do niej przeciwnej.

- Podaj wzór funkcji.
- Podaj: dziedzinę, przeciwdziedzinę, zbiór wartości, wykres.

Wykres funkcji

Miejsce zerowe: argument x , dla którego funkcja osiąga wartość 0:

$$f(x) = 0$$

Punkt przecięcia z osią OY:

$$f(0) = y$$

Przykład

Do uzupełnienia tabelki:

$$f(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -6 - 1 = -7$$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -4 - 1 = -5$$

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem:

$$f(x) = 2x - 1$$

$$\vdots$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

Tabela przykładowych wartości:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = y$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

Miejsce zerowe:

$$f(x) = 2x - 1 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

Wykres:

Punkt przecięcia z osią OY:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$$

Punkt przecięcia: $(0, -1)$

Zadania

1. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem:

a) $f(x) = (x + 2)^2$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = (x - 2)^2$

wykonaj polecenia:

1. uzupełnij tabelę przykładowych wartości:

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x) = y$							

2. naszkicuj wykres funkcji

3. określ miejsca zerowe (jeśli istnieją) i miejsce przecięcia z osią OY

2. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem:

a) $f(x) = x^2 + 1$ b) $f(x) = x^2 - 1$ c) $f(x) = x^2 - 4$

wykonaj polecenia:

1. uzupełnij tabelę przykładowych wartości:

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x) = y$							

2. naszkicuj wykres funkcji

3. określ miejsca zerowe (jeśli istnieją) i miejsce przecięcia z osią OY

3. Na podstawie powyższych przykładów wywnioskuj, co należy zrobić, żeby przesunąć wykres funkcji $f(x) = x^2$:

- a) o 4 w lewo b) o 3 w prawo
c) o 5 w górę d) o 2 w dół

Podaj wzór nowo powstałej funkcji.

Przesuwanie wykresu

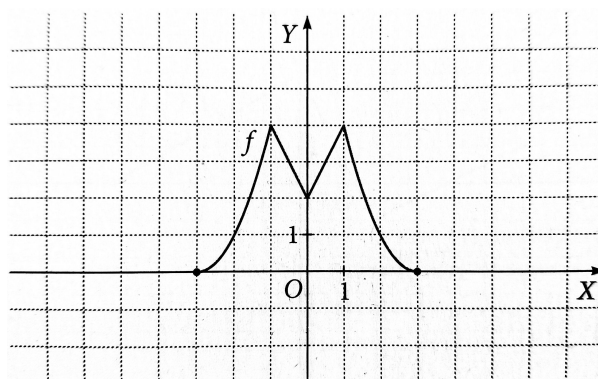
Przesuwanie wykresu: $q, p > 0$

- w górę $f(x) + q$
- w dół $f(x) - q$
- w lewo $f(x + p)$
- w prawo $f(x - p)$

Zadania

4. Dany jest wykres funkcji f .

- Naszkiej wykresy funkcji $g(x) = f(x - 2) + 1$ i $h(x) = f(x + 3) - 1$.
- Podaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności funkcji f , g i h .



Funkcja	Dziedzina	Zbiór wartości	Miejsca zerowe
$f(x)$			
$g(x) = f(x - 2) + 1$			
$h(x) = f(x + 3) - 1$			

Funkcja	Wartości dodatnie w przedziale	Wartości ujemne w przedziale	Rosnąca w przedziale	Malejąca w przedziale
$f(x)$				
$g(x) = f(x - 2) + 1$				
$h(x) = f(x + 3) - 1$				

5. Przyporządkuj wzór funkcji f do odpowiadającego jej wykresu.

$$f(x) = 2x - 1$$

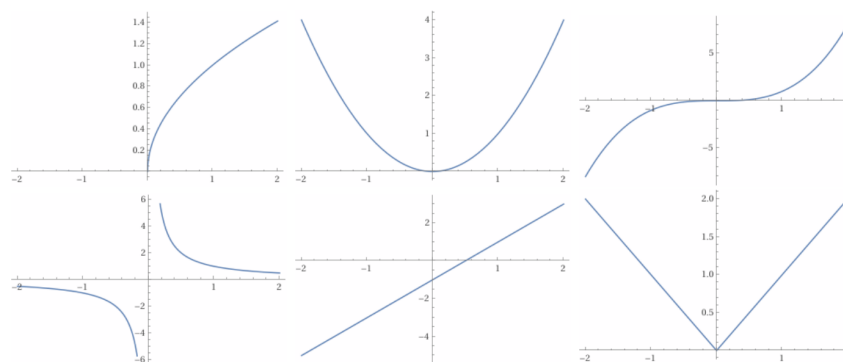
$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = x^3$$



6. Podaj wzór i naszkicuj wykres funkcji g , stosując podane przesunięcie wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{x}$, przesunięcie: 2 w prawo i 1 w górę

b) $f(x) = x^2$, przesunięcie: 2 w lewo i 4 w dół

c) $f(x) = x^3$, przesunięcie: 3 w prawo

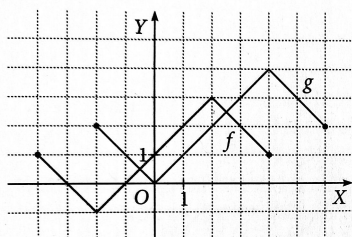
d) $f(x) = \frac{1}{x}$, przesunięcie: 1,5 w lewo i 1,5 w dół

e) $f(x) = 2x - 1$, przesunięcie: 0,5 w lewo

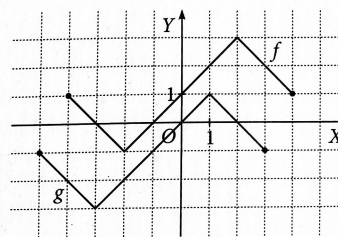
f) $f(x) = |x|$, przesunięcie: 3 w prawo i 2 w dół

7. Na rysunkach przedstawiono funkcję f oraz funkcję g , której wykres odpowiada przesuniętemu wykresowi funkcji f . Podaj to przesunięcie oraz wzór funkcji g .

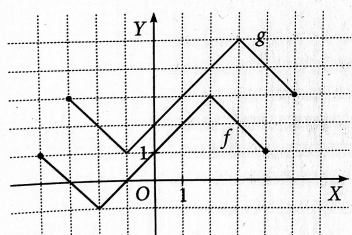
A.



C.



B.



D.

